Cvičení z teorie pravděpodobnosti 2

7. konvergence sub-martingalů

- věty o konvergenci martingalů a submartingalů

---

1. Uvažujte urnu, ve které je na počátku v čase $n = 0$ umístěno celkem b bílých a c černých kuliček. V každém časovém intervalu $(n-1, n)$ jednou vytáhneme náhodně vybranou kuličku z urny a vrátíme ji zpět spolu s dalšími celkem z kuličkami stejné barvy. Buď T_n relativní počet kuliček bílé barvy v urně v čase n a X_n indikátor vytažení bílé kuličky v časovém intervalu $(n-1, n)$.
   (a) Ukažte, že $\lim_n(T_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k) = 0$ skoro jistě pro $n \to \infty$.
   (b) Ukaže, že posloupnost X_n je permutovatelná tj. pro každou permutaci π na množině $\{1, \dots, n\}$ platí $P_{X_1,\dots,X_n} = P_{\pi(X_1),\dots,\pi(X_n)}$.
   (c) Ukažte, že $T_n \to T \sim \text{Beta}(\frac{b}{z}, \frac{c}{z})$ skoro jistě pro $n \to \infty$, tj. $ET^k = \frac{\Gamma(k+\frac{b}{z})\Gamma(\frac{b+c}{z})}{\Gamma(\frac{b}{z})\Gamma(k+\frac{b+c}{z})} = \frac{\mathrm{B}(k+\frac{b}{z}, \frac{c}{z})}{\mathrm{B}(\frac{b}{z}, \frac{c}{z})}$.

2. Nechť $\Omega = [0,1], \mathcal{A} = \mathcal{B}[0,1]$, a P je Lebesgueova míra na $[0,1]$. Buď $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkce s konečnou variací a $S_0 := \{0,1\} \subseteq S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq [0,1], n \in \mathbb{N}$ zjemňující se posloupnost konečných dělění intervalu $[0,1]$. Označme
$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{f(\lceil x \rceil_{S_n}) - f(\lfloor x \rfloor_{S_n})}{\lceil x \rceil_{S_n} - \lfloor x \rfloor_{S_n}} && \text{pro} \quad S \in [0,1]\backslash S_n \\ &= T_n(x_-) && \text{pro} \quad x \in S_n\backslash\{0\}. \end{aligned}$$
   Nechť $\cup_n S_n$ je hustá v $[0,1]$. Ukažte, že
   (a) proces T_n je (s.j. dobře definovaný) $\mathcal{F}_n$-martingal, kde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ a $X_n(x) = \lceil x \rceil_{S_n}$.
   (b) $T_n \to f'$ skoro jistě pro $n \to \infty$.
   (c) fukce f je absolutně spojitá právě tehdy, když je proces T_n stejnoměrně integrovatelný.

3. Buďte P, Q dvě pravděpodobnostní míry na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ sub-σ-algebra, zavádíme entropii míry Q vzhledem k míře P na $\mathcal{B}$ předpisem
$$H_{Q|P}(\mathcal{B}) = \int \tfrac{\mathrm{d}Q|\mathcal{B}}{\mathrm{d}P|\mathcal{B}} \ln(\tfrac{\mathrm{d}Q|\mathcal{B}}{\mathrm{d}P|\mathcal{B}})\,\mathrm{d}P = \int \ln(\tfrac{\mathrm{d}Q|\mathcal{B}}{\mathrm{d}P|\mathcal{B}})\,\mathrm{d}Q, \quad \text{pokud} \quad Q \ll P$$
   a $H_{Q|P}(\mathcal{B}) = \infty$ jinak. Buďte $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že
   (a) $0 \le H_{Q|P}(\mathcal{B}) \le H_{Q|P}(\mathcal{A})$ a $H_{Q|P}(\mathcal{B}) = 0$ právě tehdy, když platí $Q|\mathcal{B} = P|\mathcal{B}$.
   (b) $X_n := \frac{\mathrm{d}Q|\mathcal{B}_n}{\mathrm{d}P|\mathcal{B}_n}$ je $\mathcal{B}_n$-martingal, který konverguje skoro jistě.
   (c) $H_\infty := \lim_n H_n \ge E[X\ln(X)]$, kde $H_n := H_{Q|P}(\mathcal{B}_n)$ a kde $X = \lim_n X_n$ skoro jistě.
   (d) X_n je stejnoměrně integrovatelný právě tehdy, když $Q|\mathcal{B}_\infty \ll P|\mathcal{B}_\infty$ a $X = \frac{\mathrm{d}Q|\mathcal{B}_\infty}{\mathrm{d}P|\mathcal{B}_\infty}$ s.j.
   (e) X_n je stejnoměrně integrovatelný, pokud $H_\infty < \infty$.
   (f) $H_\infty = \lim_n H_n$ pro $n \to \infty$.

---

1. Je-li S_n stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_n$-submartingal, pak existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $S_n \to S$ skoro jistě a v $\mathbb{L}_1$ pro $n \to \infty$. Navíc $S_n \le E[S|\mathcal{F}_n]$ skoro jistě.

   Je-li S_n $\mathcal{F}_n$-adaptovaný proces, pak je to stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_n$-martingal právě tehdy, když existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $S_n = E[S|\mathcal{F}_n]$ platí skoro jistě pro každé n.

2. **Doobova věta o konvergenci submartingalů:** Je-li S_n submartingal takový, že $\sup_n ES_n^+ < \infty$, pak existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $S_n \to S$ skoro jistě pro $n \to \infty$.

3. **Konvergence submartingalů II:** Je-li S_n submartingal takový, že $E\sup_n(S_{n+1} - S_n)^+ < \infty$, pak existuje limita skoro jistě posloupnosti $S_n \cdot 1_{[\sup_m S_m < \infty]}$.